Capítulo 9: Respuesta en el régimen permanente de los sistemas realimentados

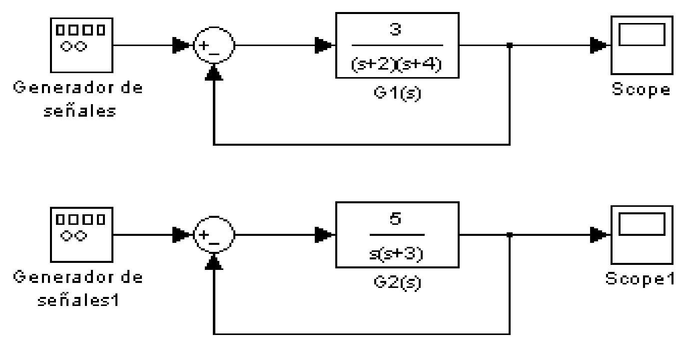
carlos.platero@upm.es (C-305)

Precisión de los sistemas realimentados

Para sistemas LTI-SISO con realimentación negativa, la precisión se cuantificará cuando la entrada y la salida sean de igual magnitud física, produciéndose dos casos distintos:

1. Realimentación unitaria: en este tipo las señales de entrada y salida son de igual naturaleza física, por tanto, el error será:

$$\boxed{L\left[e(t)\right]=E(s)=X(s)-Y(s)=\left[1-\frac{G(s)}{1+G(s)}\right]X(s)=\left(\frac{1}{1+G(s)}\right)X(s)}$$

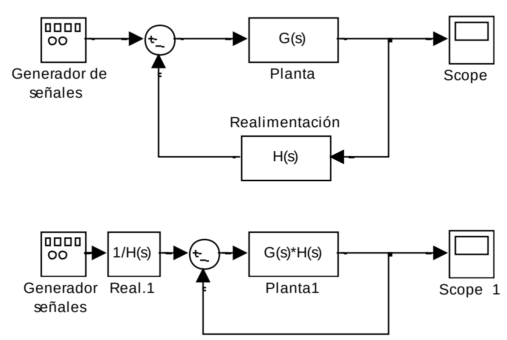


Precisión de los sistemas realimentados

Para sistemas LTI-SISO con realimentación negativa, la precisión se cuantificará cuando la entrada y la salida sean de igual magnitud física, produciéndose dos casos distintos:

2. Realimentación no unitaria: Para poder comparar la entrada y la salida, habrá que equiparar la señal física de la entrada a la misma magnitud y rango dinámico que la señal de salida:

$$\boxed{L[e(t)] = E(s) = \frac{X(s)}{H(s)} - Y(s) = \frac{X(s)}{H(s)}\left[1 - \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}H(s)\right]}$$



Errores en el régimen permanente para sistemas de REALIMENTACIÓN UNITARIA

- La precisión depende de la señal de entrada y de la FDT del sistema de control

$$\boxed{L\left[e(t)\right]=E(s)=X(s)-Y(s)=\left[1-\frac{G(s)}{1+G(s)}\right]X(s)=\left(\frac{1}{1+G(s)}\right)X(s)}$$

- La medida será obtenida por aplicación del teorema del valor final:

$$\boxed{e_{rp}=e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\cdot E(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot X(s)\left[\frac{1}{1+G(s)}\right]}$$

$$e_{rp} = e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot X(s) \left[\frac{1}{1+G(s)} \right]$$

- Error y coeficiente estático para el escalón unitario, e_p y k_p:

$$e_p = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1+G(s)} \; ; \; k_p = \lim_{s \to 0} G(s) \quad (p \equiv posición)$$

$$e_p = \frac{1}{1+k_p}$$

- Error y coeficiente estático para la rampa unitaria, e_v y k_v:

$$e_v = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s(1+G(s))} \; ; \; k_v = \lim_{s \to 0} s\,G(s) \quad (v \equiv velocidad)$$

$$e_v = \frac{1}{k_v}$$

- Error y coeficiente estático para la parábola unitaria, e_a y k_a:

$$e_a = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2(1+G(s))} \; ; \; k_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) \quad (a \equiv aceleración)$$

$$e_a = \frac{1}{k_a}$$

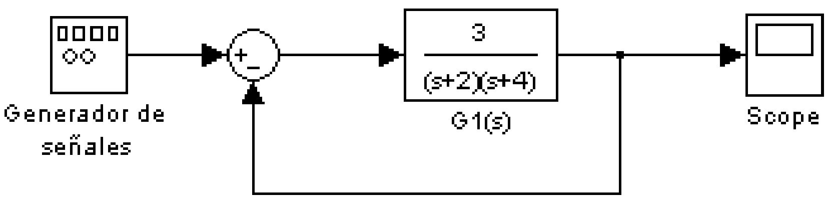
Cuadro de error en el régimen permanente

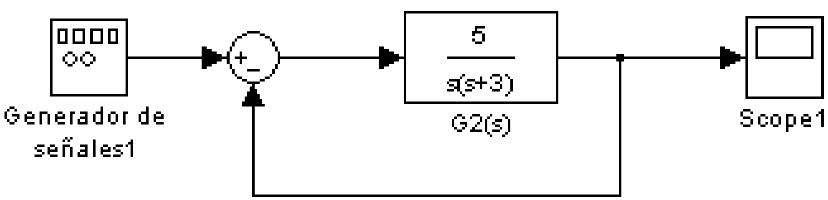
- Se define tipo de un sistema realimentado al número de polos en el origen de la cadena abierta

Tipo de sistema	Constante de error k_p	k_v	k_a	Error al escalón unitario	Error a la rampa unitaria	Error a la parábola
0	k_p	0	0	$\frac{1}{1+k_p}$	∞	∞
1	∞	k_v	0	0	$\frac{1}{k_v}$	∞
2	∞	∞	k_a	0	0	$\frac{1}{k_a}$
3	∞	∞	∞	0	0	0

Ejemplo 9.1

- Obtener los errores del régimen permanente ante una entrada en escalón, rampa y parábola unitaria para los siguientes sistemas de la figura



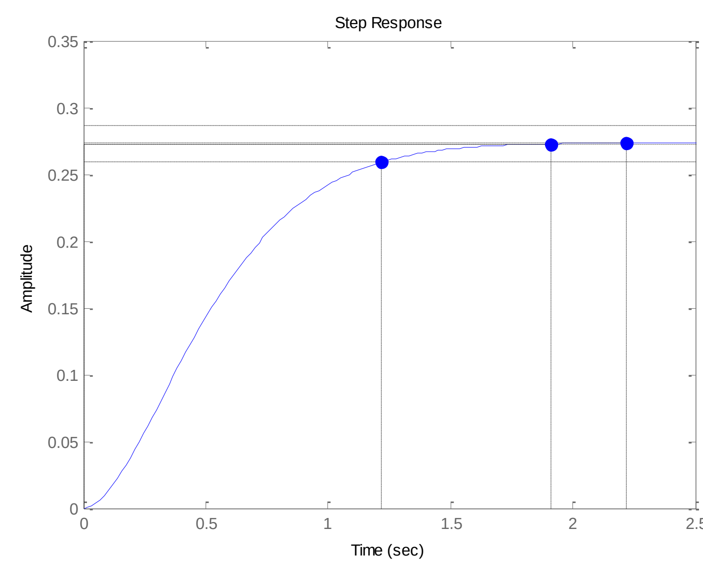


$$k_p \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{3}{8} \quad ; \quad e_p = \frac{1}{1+k_p} = \frac{1}{1+\frac{3}{8}} = \frac{8}{11}$$

$$k_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = 0 \quad ; \quad e_v = \frac{1}{k_v} = \infty$$

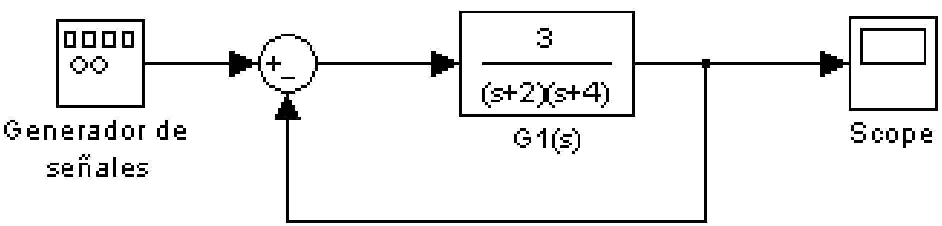
$$k_a = \lim_{s\to a} s^2 G(s) = 0 \; ; \quad e_a = \frac{1}{k_a} = \infty$$

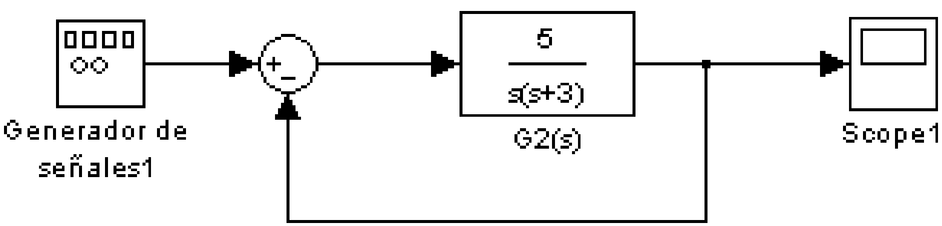
$$M_{1(s)} = \frac{3}{s^2+6s+11} = \frac{3}{(s+3)^2+2}$$



Ejemplo 9.1

- Obtener los errores del régimen permanente ante una entrada en escalón, rampa y parábola unitaria para los siguientes sistemas de la figura



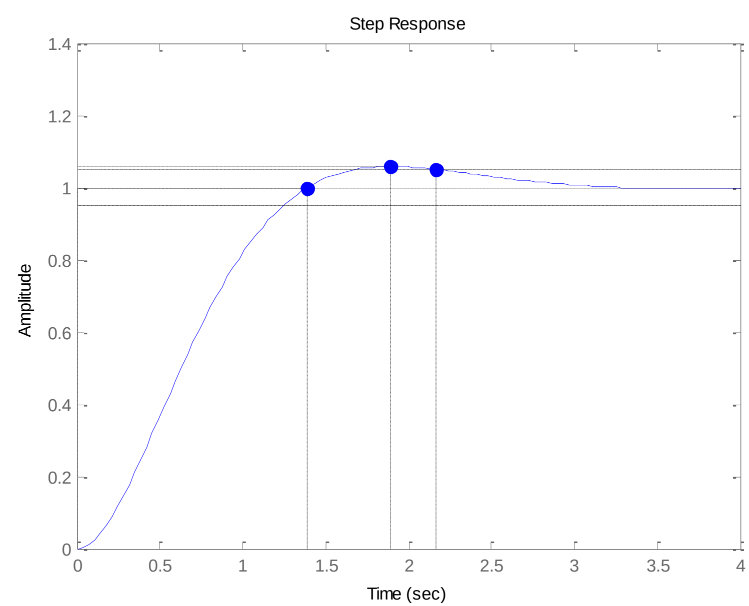


$$k_p = \infty \quad ; \quad e_p = 0$$

$$k_v = \frac{5}{3} \quad ; \quad e_v = \frac{3}{5}$$

$$k_a = 0 \quad ; \quad e_a = \infty$$

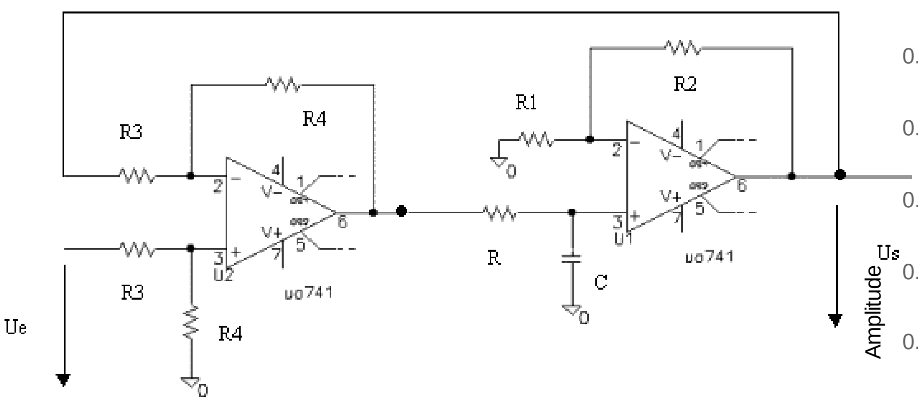
$$M_2 = \frac{5}{s^2+3s+5} = \frac{5}{(s+1.5)^2+1.66^2}$$

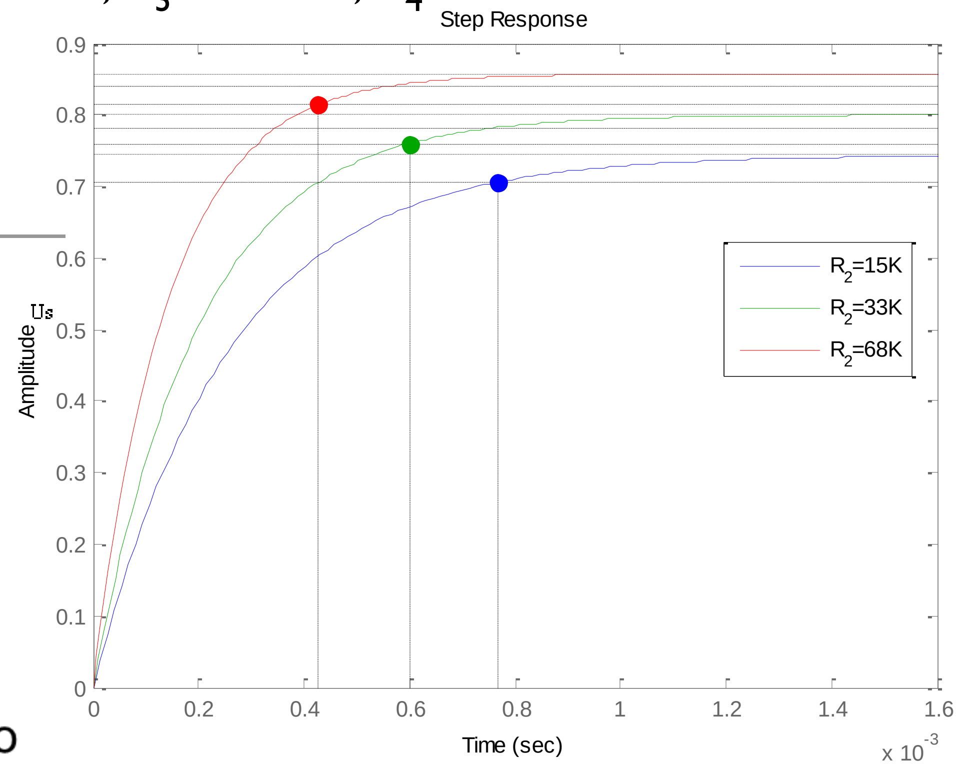


Ejercicio 9.1

El circuito de la figura es excitado por un escalón unitario. Dibujar las formas de las ondas de la señal de salida e indicar los valores más significativos para los tres valores siguientes de R_2: a) 15kΩ, b) 33kΩ y c) 68kΩ.

Datos: R = 100kΩ, C= 10 nF, R_1 = 33kΩ, R_3 = 33kΩ, R_4 = 68kΩ.





La ganancia de tensión en cadena cerrada es: $A_v(s) = \frac{2k}{1+2k}\frac{1}{1+\frac{10^3}{1+2k}s}$ siendo

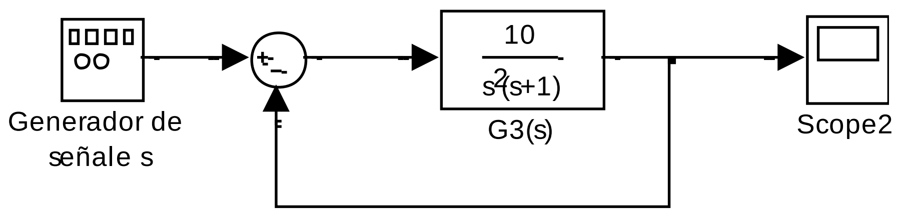
$$k = 1 + \frac{R2}{R1}.$$

Ejemplo 9.2

El equipo de la figura adjunta ha sido excitado con una señal de entrada del tipo:

$$\boxed{x(t) \cong 3 + 5t + 10t^2}$$

Determinar el error en el régimen permanente



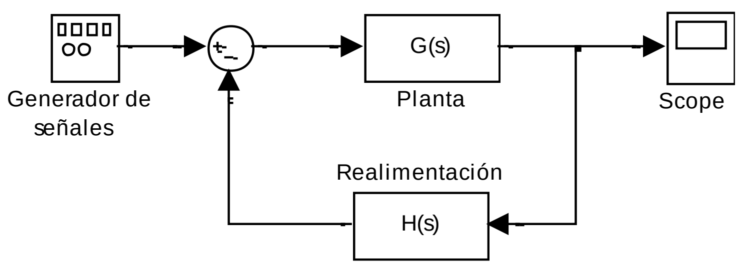
$$e_{r_p} \cong 3e_p + 5e_v + 20e_a = 20e_a = 2$$

$$e_a = \frac{1}{\lim\limits_{s \to 0} s^2 \dfrac{10}{s^2(s+1)}} = \frac{1}{10}$$

El sistema es inestable. No tiene sentido

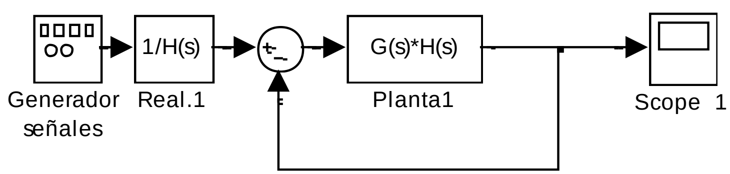
Errores en el régimen permanente para realimentación no unitaria

- Hay dos casos:
  1. Cuando no hay ceros en el origen en la FDT de la realimentación, H(s)



$$\boxed{e(s)=\frac{X(s)}{H(s)}-y(s)=X(s)\frac{1}{H(s)}[1-H(s)M(s)]}$$

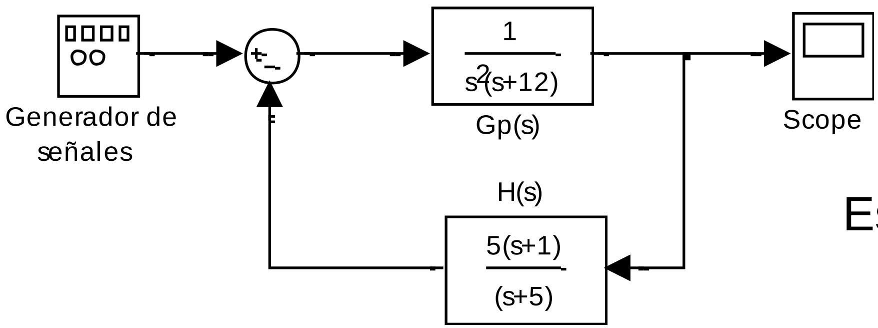
$$k_H=\lim_{s\to 0}H(s)=H(0)$$



$$\boxed{e_{rp}=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{k_H}[1-k_H M(s)]X(s)}$$

Ejemplo 9.3

- Determinar el error en el régimen permanente para las tres señales temporales unitarias de test del siguiente sistema.



$$M(s)=\frac{(s+5)}{s^4+17s^3+60s^2+5s+5}$$

$$k_H=H(0)=1$$

Estable aunque con bajo margen de fase

$$e_p=\lim_{s\to 0}\left[1-\frac{(s+5)}{s^4+17s^3+60s^2+5s+5}.1\right]=0$$

$$e_v=\lim_{s\to 0}\left[\frac{(5-5)+(5-1)s+60s^2+17s^3+s^4}{s\left(s^4+17s^3+60s^2+5s+5\right)}\right]=\frac{5-1}{5}=\frac{4}{5}$$

$$e_a=\lim_{s\to 0}\frac{(5-5)+(5-1)s+60s^2+17s^3+s^4}{s^2\left(s^4+17s^3+60s^2+5s+5\right)}=\infty$$

Errores en el régimen permanente para realimentación no unitaria

- Hay dos casos: $$\boxed{e(s)=\frac{X(s)}{H(s)}-y(s)=X(s)\frac{1}{H(s)}[1-H(s)M(s)]}$$

1. Cuando no hay ceros en el origen en la FDT de la realimentación, H(s)

$$k_H=\lim_{s\to 0}H(s)=H(0)$$

$$\boxed{e_{rp}=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{k_H}[1-k_H M(s)]X(s)}$$

2. Cuando si existen.

$$H(s)=s^r H^*(s)$$

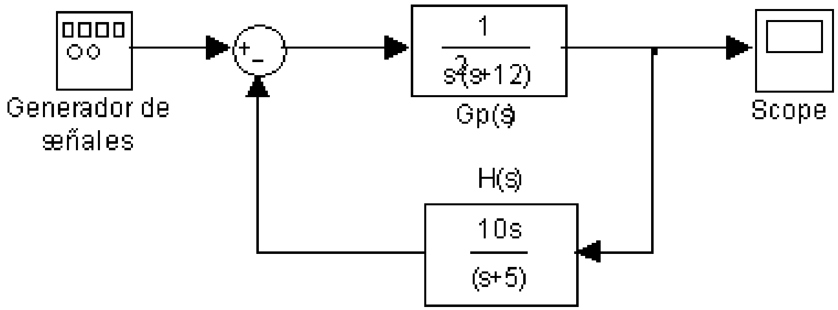
$$k_H^*=\lim_{s\to 0}\frac{H(s)}{s^r}$$

$$e(s)=\frac{X(s)}{k_H^* s^r}-y(s)$$

$$\boxed{e_{rp}=\lim_{s\to 0}s\cdot e(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{k_H^* s^r}\left[1-k_H^* s^r M(s)\right]s\cdot X(s)}$$

Ejemplo 9.4

- Determinar el error en el régimen permanente para las tres señales temporales unitarias de test del siguiente sistema.



$$k_H^* = \lim_{s\to 0}\frac{H(s)}{s} = 2$$

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{s+5}{s^4+17s^3+60s^2+10s}$$

$$e_p = \lim_{s\to 0}\frac{1}{k_H s}\left(1-\frac{k^*_H\,(s+5)s}{s_4+17s^3+60s^2+10s}\right)$$

$$e_p = \lim_{s\to 0}\frac{\left(10-k^*_H 5\right)s+\left(60-k^*_H\right)s^2+17s^3+s^4}{2s\left(s^4+17s^3+60s^2+10s\right)}$$

$$¿\ e_p = \frac{60-2}{20} = \frac{58}{20}\quad ?$$

$$e_v = \infty \qquad e_a = \infty$$

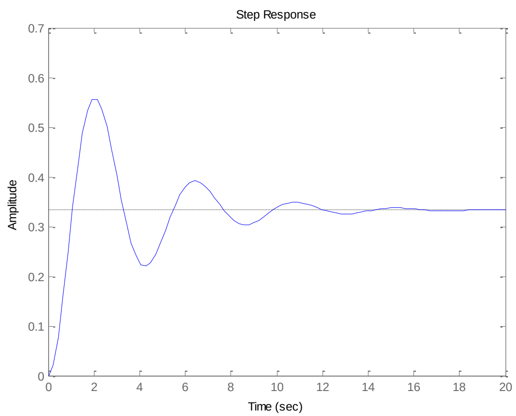
El sistema es inestable. No tiene sentido

Ejercicio 9.2

- Determinar el error en el régimen permanente ante las señales del test:

$$G(s)=\frac{1}{s^2+s+2} \qquad H(s)=\frac{1}{1+s} \qquad k_H=1 \quad M(s)=\frac{s+1}{s^3+2s^2+3s+3}$$

g1=tf(1,[1 1 2])
h1=tf(1,[1 1])
g11=feedback(g1,h1)
step(g11)



$$e_p=\frac{2}{3} \quad e_v=\infty \quad e_a=\infty$$

$$s_d=-1.39,-0.3\pm j1.43$$

$$M_{eq}(s)=\frac{0.72}{s^2+0.6s+2.15}$$

$$t_s=10.5s \quad t_p=2.2s \quad t_r=1.24s \quad M_p=52\%$$

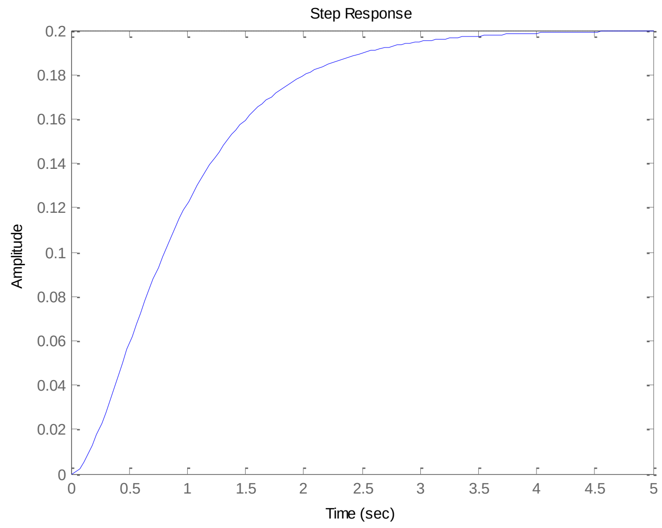
Ejercicio 9.2

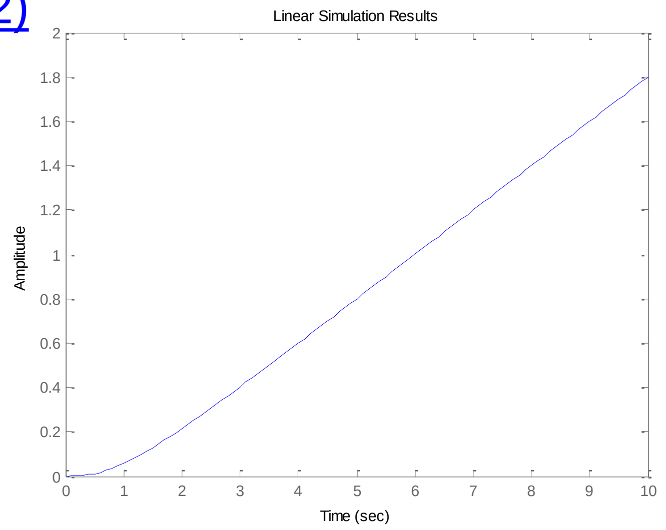
- Determinar el error en el régimen permanente ante las señales del test:

$$G(s)=\frac{1}{s(s+5)} \qquad H(s)=5 \qquad k_H=5 \quad M(s)=\frac{1}{s^2+5s+5}$$

$$e_p=0 \quad e_v=\frac{1}{5} \quad e_a=\infty$$

```
g2=tf(1,[1 5 0])
h2=tf(5,1)
g21=feedback(g2,h2)
step(g21)
t=0:.1:10;
u=t;
lsim(g21*5,u,t)
```





Ejercicio 9.2

- Determinar el error en el régimen permanente ante las señales del test:

$$G(s)=\frac{1}{s^2+s+2} \qquad H(s)=\frac{1}{1+s} \qquad k_H=1 \quad M(s)=\frac{s+1}{s^3+2s^2+3s+3} \qquad e_p=\frac{2}{3} \quad e_v=\infty \quad e_a=\infty$$

$$G(s)=\frac{1}{s(s+5)} \qquad H(s)=5 \qquad k_H=5 \quad M(s)=\frac{1}{s^2+5s+5} \qquad e_p=0 \quad e_v=\frac{1}{5} \quad e_a=\infty$$

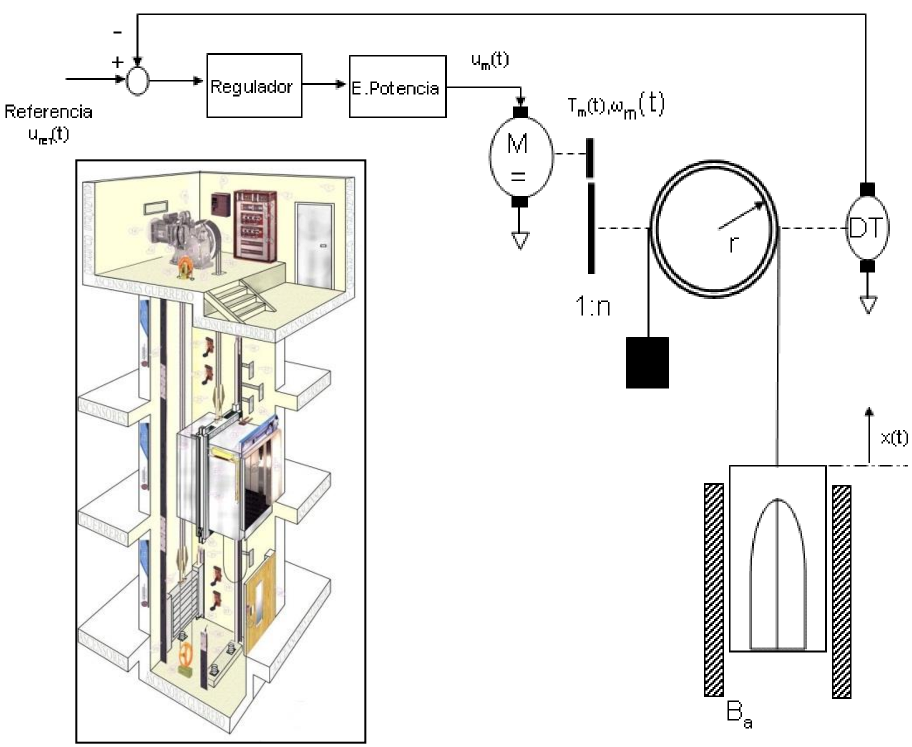
$$G(s)=\frac{1}{s^2(s+10)} \qquad H(s)=\frac{s+1}{s+5} \qquad k_H=\frac{1}{5} \quad M(s)=\frac{s+5}{s^4+15s^3+50s^2+s+1} \qquad e_p=0 \quad e_v=\frac{4}{25} \quad e_a=\infty$$

$$G(s)=\frac{1}{s^2(s+10)} \qquad H(s)=5s \qquad k^*_H=5 \quad M(s)=\frac{1}{s^3+10s^2+5s} \qquad ¿\; e_p=\frac{10}{25} \quad e_v=\infty \quad e_a=\infty\; ?$$

El sistema es inestable. No tiene sentido

Ejercicio 9.4

El sistema de la figura representa el control de velocidad de un ascensor. El eje del motor se acopla a un tren de engranajes y la salida de éste se une a una polea de radio *r* y de masa despreciable. De la polea cuelga el ascensor y el contrapaso, ambos de igual masa, *M*, cuando el ascensor está en vacío. El bucle de control se cierra con una dínamo tacométrica unida a la polea. Se pide, para el ascensor en vacío:



1. Obtener la FDT entre el par del motor y su velocidad angular
2. Función de transferencia del sistema para cualquier valor de *k*.
3. Si se desea un error al escalón del 15%, calcular *k* y representar la evolución temporal de la velocidad del ascensor ante una entrada en escalón unitario. ¿A qué velocidad nominal sube?¿Cuanto tiempo tarda en alcanzar el régimen permanente?.
4. Si el peso máximo de carga es de 300 kg, ¿cómo afecta a la dinámica del ascensor?

<u>Datos Motor:</u> R = 1Ω (Resistencia del inducido del motor), K_p = 0.19 Nm/A (Constante de par del motor), J_m = 0.03 kgm² (Momento de inercia del rotor). <u>Tren de engranajes:</u> n = 100 (Relación de reducción). <u>P olea:</u> r = 1 m. <u>Ascensor:</u> B_a = 7 Ns/m (Rozamiento viscoso equivalente entre ascensor y pared). Dínamo tacométrica: K_{DT} = 1 Vs/rad, M_a = 300kg

Ejercicio 9.4

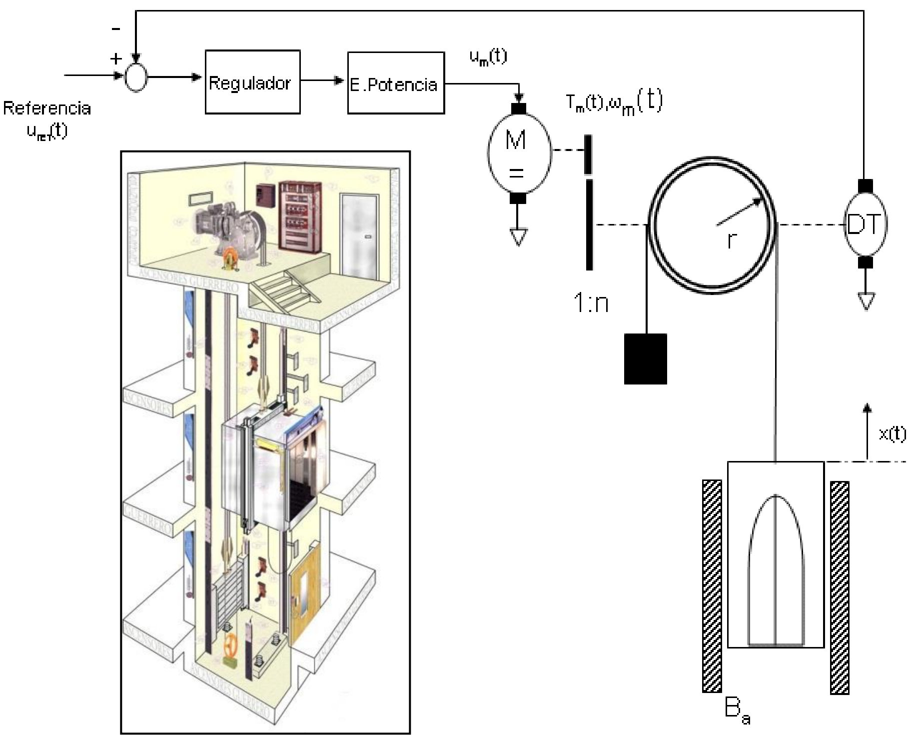
1. Obtener la FDT entre el par del motor y su velocidad angular

$$F_1(t) = M_a \ddot{x}(t) + B_a \dot{x} + M_a g \quad (Ascensor)$$
$$F_2(t) = -M_c \ddot{x}(t) + M_c g \quad (Contrapeso)$$

$$T_m(t) = \left(J_m + \frac{2}{n^2} M_a r^2 \right) \dot{\omega}_m + \frac{1}{n^2} B_a r^2 \omega_m$$

2. Función de transferencia del sistema para cualquier valor de *k*.

$$\frac{\omega_m(s)}{u_m(s)} = \frac{0.19}{0.09s + 0.0368}$$



$$\frac{v(s)}{u_{ref}(s)} = \frac{0.19 \cdot 10^{-2} k}{0.09s + 0.19 \cdot 10^{-2} k + 0.0368}$$

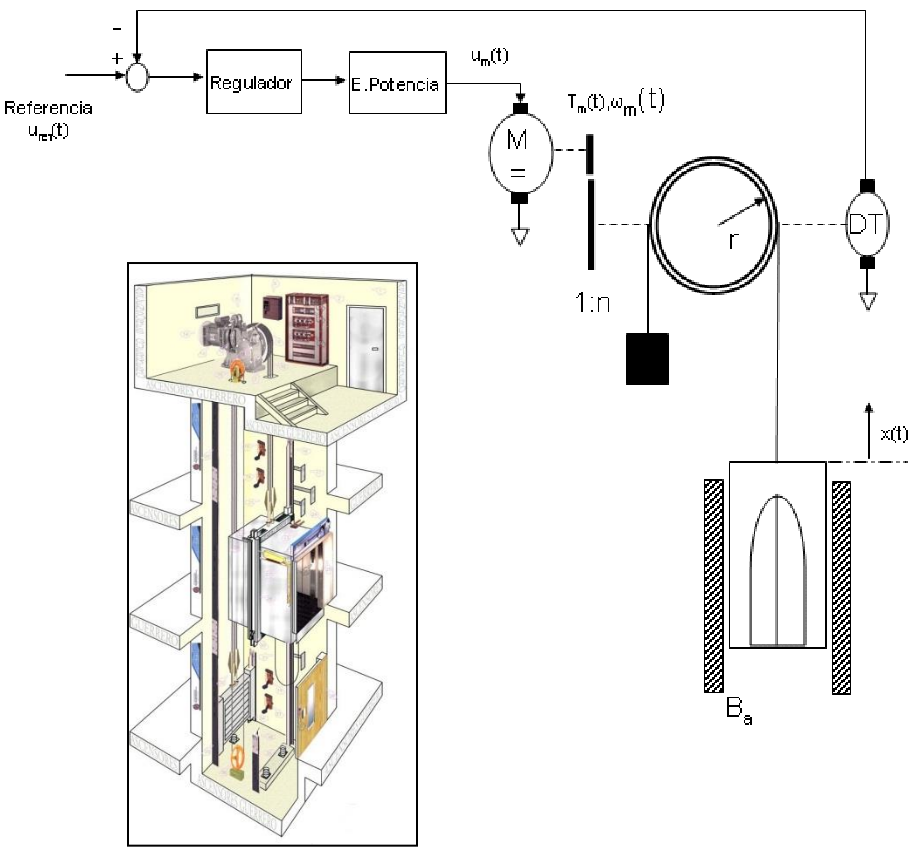
3. Si se desea un error al escalón del 15%, calcular *k* y representar la evolución temporal de la velocidad del ascensor ante una entrada en escalón unitario. ¿A qué velocidad nominal sube?¿Cuanto tiempo tarda en alcanzar el régimen permanente?.

$$e_p = \frac{1}{1 + k_p} = 0.15 \quad k \cong 110 \qquad \frac{v(s)}{u_{ref}(s)} = \frac{0.85}{0.366s + 1}$$

El ascensor tendrá una velocidad nominal de 0.85m/s y alcanzará el régimen permanente en 1s.

Ejercicio 9.4

4. Si el peso máximo de carga es de 300 kg, ¿cómo afecta a la dinámica del ascensor?



$$\frac{\Delta\omega_m(s)}{\Delta T_m(s)}=\frac{1}{\left(J_m+\dfrac{(2M_a+M_p)r^2}{n^2}\right)\cdot s+\dfrac{B_a r^2}{n^2}}$$

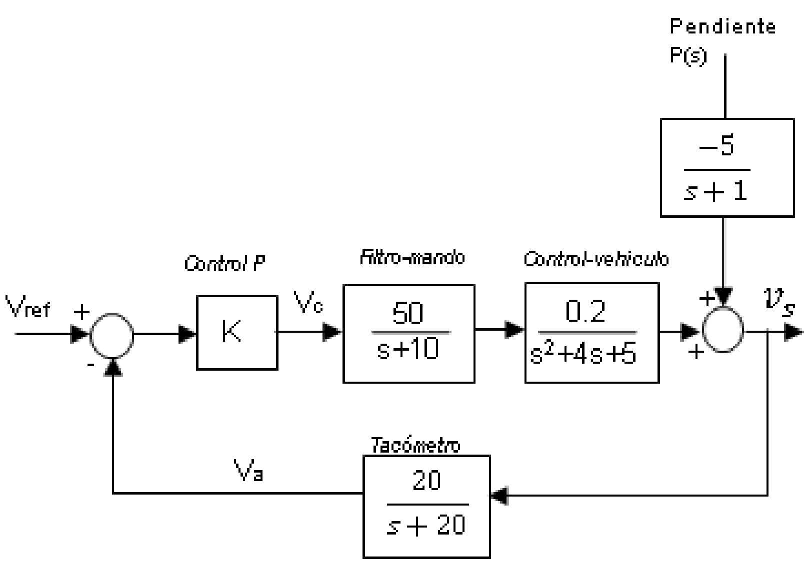
$$\frac{\Delta v(s)}{\Delta u_{ref}(s)}=\frac{0.85}{0.488s+1}$$

Tardará 1.5 s en alcanzar la velocidad del régimen permanente.

Examen (enero 2016)

Se ha introducido un sencillo control de velocidad manejado por el usuario para el Airwheel de la figura. De manera simplificada, y en condiciones ideales sin pendiente y para un peso de usuario medio, se ha obtenido un modelo del comportamiento del sistema control-vehículo, tal y como se refleja en el diagrama de bloques. Se ha modelado además el efecto que provoca la pendiente del terreno sobre la respuesta en velocidad del sistema. Se desea estudiar el efecto de la ganancia K de un controlador proporcional. Se pide:

1. Obtener el valor de la ganancia K que logra que el sistema tenga un error en régimen permanente inferior al 25%. ¿Con qué velocidad seguiría el sistema, una vez alcanzado el régimen permanente, una referencia de la forma $V_{ref}(t)=2$?
2. ¿Qué error cometerá el sistema ante una pendiente de 0,2 para el valor de ganancia calculado anteriormente?



Examen (enero 2016)

1.- $e_{rp} < 0{,}25 \; e_{rp} = \lim_{s\to 0} s\frac{X(s)}{K_H}\left(1 - K_H M(s)\right)$

$$M(s) = \frac{\frac{10K}{(s+10)(s^2+4s+5)}}{1 + K\frac{20}{s+20}\frac{10}{(s+10)(s^2+4s+5)}} = \frac{10K(s+20)}{(s+20)(s+10)(s^2+4s+5)} \text{ +200k}$$

$$e_{rp} = \lim_{s\to 0} s\frac{X(s)}{K_H}\left(1 - K_H M(s)\right) = \left(1 - \frac{200K}{1000+200K}\right)\lim_{s\to 0} sX(s) = \left(\frac{1000}{1000+200K}\right)\lim_{s\to 0} sX(s)$$

El error de posición se medirá para el escalón, y por tanto:

$$e_{rp} = 0{,}25 > \left(\frac{1000}{1000+200K}\right) \Rightarrow K > 15$$

Si el error de posición con $K_H = 1$ es de 0,25, significa que para una entrada de 2, se cometerá un error de 0,5, por lo que la salida en régimen permanente es 1,5

2.- $Error = Y_{deseado} - Y_{real} = 0 - Y_{real} = -\frac{Y(s)}{P(s)}P(s) = -\left(\frac{-5}{s+1}\frac{(s+20)(s+20)(s^2+4s+5)}{(s+20)(s+10)(s^2+4s+5)+200K}\right)$

Luego para un escalón de 0,2 el error que se comete a la salida es:

$$\lim_{s\to 0} s\left(-\frac{Y(s)}{P(s)}\frac{0{,}2}{s}\right) = -\frac{1}{4}$$